CEFET-BA

Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia

MATEMÁTICA FINANCEIRA

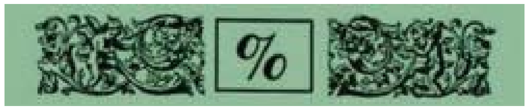
TEXTOS E EXERCÍCIOS – PARTE I

CURSO DE ADMINISTRAÇÃO

ERON

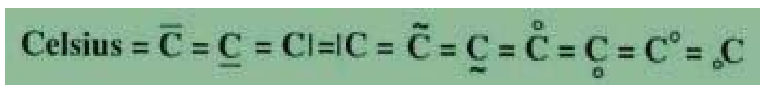
CONTEÚDOS

GÊNESE DO SÍMBOLO DE PORCENTAGEM

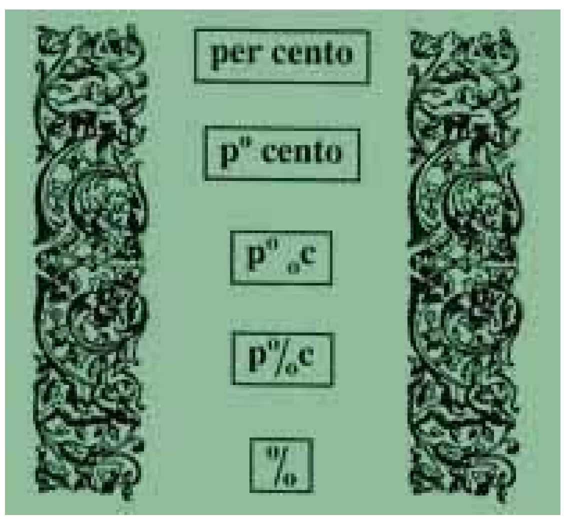


Nos manuscritos italianos dos séculos XIV e XV, encontramos a evolução desse símbolo, a qual aconteceu de forma natural e curiosa.

Para entender essa metamorfose basta saber que a abreviação de uma palavra em italiano arcaico podia ser feita nas seguintes formas:



Essa possibilidade da língua permitiu aos escritores grafarem:



História da Matemática comercial e financeira

Introdução

É bastante antigo o conceito de juros, tendo sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam normalmente a idéia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.

Tábuas antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecida na região da Babilônia. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábuas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos.

Há tábuas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas. Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas. Das 400 tábuas, cerca de metade eram tábuas matemáticas. Estas últimas envolvem tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, de quadrados e cubos e mesmo tábuas de exponenciais. Quanto a estas, provavelmente eram usadas, juntamente com a interpolação, em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação.

Os juros e os impostos

Os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Um dos primeiros indícios apareceu na já na Babilônia no ano de 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

A História também revela que a idéia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos.

Como em todas as instruções que tem existido por milhares de anos, algumas das práticas relativas a juros foram modificadas para satisfazer às exigências atuais, mas alguns dos antigos costumes ainda persistem de tal modo que o seu uso nos dias atuais ainda envolve alguns procedimentos incômodos. Entretanto, devemos lembrar que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita – no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros numa base anual era mais razoável tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época, novas formas de se trabalhar com a relação tempo-juros foram criadas (juros semestral, bimestral, diário, etc).

O valor e a moeda

Na época em que os homens viviam em comunidades restritas, tirando da natureza todos os produtos de que tinham necessidade, sem dúvida devia existir muito pouca comunicação entre as diversas sociedades. Mas com o desenvolvimento do artesanato e da cultura e em razão da desigual repartição dos diversos produtos naturais, a troca comercial mostrou-se pouco a pouco necessária.

O primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto sem a intervenção de uma "moeda" no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade.

Por vezes, quando se tratava de grupos que entretinham relações pouco amistosas, essas trocas eram feitas sob a forma de um escambo silencioso. Uma das duas partes depositava, num lugar previamente estabelecido, as diversas mercadorias com as quais desejava fazer a troca e, no dia seguinte, encontrava em seu lugar (ou ao lado delas) os produtos propostos pelo outro parceiro. Se a troca fosse considerada conveniente levavam-se os produtos, senão retornava-se no dia seguinte para encontrar uma quantidade maior. O mercado podia então durar vários dias ou mesmo terminar sem troca quando as duas partes não se entendiam.

Cenas como tais puderam ser observadas, por exemplo, entre os aranda da Austrália, os vedda do Ceilão, os bosquímanos e os pigmeus da África, os botocudos do Brasil, bem como na Sibéria e na Polinésia. Com a intensificação das comunicações entre os diversos grupos e a importância cada vez maior das transações, a prática do escambo direto tornou-se bem rapidamente um estorvo. Não se podiam mais trocar mercadorias segundo o capricho de tal ou qual indivíduo ou em virtude de um uso consagrado ao preço de intermináveis discussões.

Houve, portanto, a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliações e de equivalências, fundado num princípio (vizinho daquele da base de um sistema de numeração) dando a definição de algumas unidades ou padrões fixos. Nesse sistema é sempre possível estimar tal ou qual valor, não somente para as operações de caráter econômico mas também (e talvez sobretudo) para a regulamentação de problemas jurídicos importantes e, todas as espécies de produtos, matérias ou objetos utilitários serviram nessa ocasião.

A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. Não é por acaso que a palavra latina pecúnia quer dizer "fortuna, moeda, dinheiro": provém, com efeito, de pecus, que significa "gado, rebanho"; além disso, o sentido próprio da palavra pecunia corresponde ao "ter em bois". Mas nos tempos antigos a operação de escambo, longe de ser um ato simples, devia ser, ao contrário, envolta de formalidades complexas, muito provavelmente ligadas à mística e às práticas mágicas. É em todo caso o que revela a análise etnológica feita nas sociedades "primitivas" contemporâneas, que se viu confirmar por inúmeras descobertas arqueológicas. Pode-se, portanto, supor que nas culturas pastorais a idéia de boi-padrão (moeda de sangue) sucedeu à idéia de "boi de sacrifício", ela mesma ligada ao valor intrínseco estimado do animal.

Em contrapartida, nas ilhas do Pacífico as mercadorias foram estimadas em colares de pérolas ou de conchas. Após um período, começou-se por trocar faixas de tecido por animais ou objetos. O tecido era a moeda; a unidade era o palmo da fita de duas vezes oitenta fios de largura. Tais métodos apresentavam, contudo, sérias dificuldades de aplicação. Assim, à medida que o comércio se desenvolvia, os metais desempenharam um papel cada vez maior nas transações comerciais, vindo a tornar-se no fim das contas a "moeda de troca" preferida dos vendedores e compradores. E as avaliações das diversas mercadorias passaram a ser feitas quantitativamente pelo peso, cada uma delas referindo a uma espécie de peso-padrão relativo a um ou a outro metal.

Igualmente no Egito faraônico, os gêneros e as mercadorias foram freqüentemente estimados e pagos em metal (cobre, bronze e, por vezes, ouro ou prata), que se dividia inicialmente em pepitas e palhetas. A avaliação era feita também sob a forma de lingotes ou de anéis, cujo valor se determinava em seguida pela pesagem.

Até o momento não somente tratamos de um simples escambo, mas também um verdadeiro sistema econômico. A partir de então, graças ao padrão de metal, as mercadorias passaram a não mais ser trocadas ao simples prazer dos contratantes ou segundo usos consagrados freqüentemente arbitrários, mas em função de seu "justo preço".

Até então, tratava-se somente de introduzir nas transações e nos atos jurídicos uma espécie de peso-padrão, unidade de valor à qual o preço de cada uma das mercadorias ou ações consideradas era referido. Partindo desse princípio, tal metal ou tal outro podia então servir em toda ocasião como "salário", "multa" ou como "valor de troca", e no caso da "multa", algum tipo de cálculo de juros primário era utilizado para se obter um certo valor para a mesma.

Aprendendo a contar abstratamente e agrupar todas as espécies de elementos seguindo o princípio da base, o homem aprendeu assim a estimar, avaliar e medir diversas grandezas (pesos, comprimentos, áreas, volumes, capacidades etc.). Aprendeu igualmente a atingir e conceber números cada vez maiores, antes mesmo de ser capaz de dominar a idéia do infinito.

Pôde elaborar também várias técnicas operatórias (mentais, concretas e, mais tarde, escritas) e erguer os primeiros rudimentos de urna aritmética inicialmente prática, antes de tornar-se abstrata e conduzir à álgebra – onde hoje temos a Matemática Financeira amplamente desenvolvida.

Foi também aberta a via para a elaboração de um calendário e de uma astronomia, bem como para o desenvolvimento de uma geometria estruturada inicialmente em medidas de comprimento, áreas e volumes, antes de ser especulativa e axiomática. Numa palavra, a aquisição desses dados fundamentais permitiu pouco a pouco à humanidade tentar medir o mundo, compreendê-lo um pouco melhor, colocar a seu serviço alguns de seus inúmeros segredos e organizar, para desenvolvê-la, sua economia.

Os bancos

O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da matemática comercial e financeira de modo geral. Na época em que o comércio começava a chegar ao auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Nos diversos países eram cunhadas moedas de ouro e prata.

Durante a expansão do comércio, assim como durante as guerras de conquista, as moedas dos diferentes países eram trocadas, mas o pagamento só podia ser efetuado com dinheiro do país específico. Conseqüentemente, dentro das fronteiras de cada país, as moedas estrangeiras deviam ser cambiadas por dinheiro deste país. Por outro lado, os comerciantes e outras pessoas possuidoras de muito dinheiro, que viajavam ao exterior, precisavam de dinheiro de outros países, que compravam com moeda nacional. Com o passar do tempo, alguns comerciantes ficaram conhecendo muito bem as moedas estrangeiras e passaram a acumulá-las em grandes quantidades. Desta forma, dedicaram-se exclusivamente ao câmbio de dinheiro, ou seja, ao comércio de dinheiro.

Aconteceu então a divisão de trabalho dentro do campo do comércio paralelamente aos comerciantes que se ocupavam com a troca de artigos comuns, surgiram os cambistas, isto é, comerciantes dedicados ao intercâmbio de uma mercadoria específica: o dinheiro.

Num espaço de tempo relativamente curto, acumularam-se fantásticas somas de dinheiro nas mãos dos cambistas. Com o tempo, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Naquela época, e devido à deficiente organização das instituições responsáveis pela segurança social do indivíduo, não era recomendável que tivesse em sua casa muitas moedas de ouro e prata. Estas pessoas entregavam seu dinheiro à custódia do cambista rico, que o guardava e devolvia ao dono quando ele pedisse. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro.

Era natural que a seguinte idéia ocorresse: "Porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em meu poder sem qualquer lucro para mim? – Ai então percebe-se que a palavra "lucro" está diretamente interligada com o conceito de finanças – É pouco provável que todos os proprietários, ao mesmo tempo e num mesmo dia, exijam a devolução imediata de todo seu dinheiro. Emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional". Vimos que neste pensamento do mercador, a idéia de lucro já aparece fortemente.

Assim tiveram início as operações creditícias. Aqueles que, por alguma razão, se encontravam sem dinheiro – comerciantes, senhores feudais e não raras vezes o próprio rei ou o erário nacional – recorriam ao cambista que lhes emprestava grandes somas de dinheiro a juros "razoáveis".

O juro era pago pelo usufruto do dinheiro recebido ou, mais propriamente, era a "compensação pelo temor" de quem dava dinheiro emprestado e assim se expunha a um grande risco. Entretanto estes juros alcançaram, em alguns casos, quantias incríveis: na antiga Roma os usuários exigiam de 50 a 100 por cento e na Idade Média, de 100 a 200 por cento, às vezes mais, em relação direta com a necessidade do solicitante ou do montante da soma.

Estes juros foram chamados – com toda justiça – de usurário, o dinheiro recebido emprestado, de capital usurário e o credor, de usureiro. O cambista exercia sua profissão sentado num banco de madeira em algum lugar do mercado. Daí a origem da palavra "banqueiro" e "banco". Os primeiros bancos de verdade da História foram criados pelos sacerdotes.

No mundo antigo, entre os egípcios, babilônios e mais tarde entre os gregos e romanos, estava amplamente difundido o costume segundo o qual os cidadãos mais abastados deviam confiar a custódia de seu ouro aos sacerdotes.

A Igreja cristã não só deu continuidade à tradição das operações creditícias dos antigos sacerdotes, que considerava pagãos, mas desenvolveu-as em grande escala. A Igreja Católica criou o "Banco do Espírito Santo", com um fabuloso capital inicial. Seu verdadeiro propósito era tornar mais expedita a exação, aos fiéis, dos chamados "denários de São Pedro" destinados a satisfazer as frugalidades do Papa e para facilitar o pagamento de dízimos e indulgências, assim como para a realização de transações relacionadas com os empréstimos, em outras palavras, com a usura.

Ao mesmo tempo lançou um anátema e condenou às masmorras da inquisição os cidadãos que emprestavam dinheiro a juros, mesmo que este juro fosse menor do que aquele que ela exigia por seu dinheiro. A Igreja proibia a seus fiéis que cobrassem juros por seu dinheiro, invocando como autoridade a Sagrada Escritura, onde se lê: "Amai pois vossos inimigos e fazei o bem, e emprestei, nada esperando disso" (São Lucas, 6,35). Na realidade, esta proibição era motivada por um interesse econômico muito "mundano": a Igreja ambicionava assegurar para si o monopólio absoluto na exação de juros.

Apesar das maldições e ameaças com o fogo eterno, a Igreja não pôde conter a avidez por ganhos e lucros das pessoas, tanto mais que o próprio desenvolvimento do comércio exigia a criação de uma ampla rede bancária. As iniciadoras desta atividade foram as cidades-estado da Itália, que tinham um vasto comércio, cujo raio de ação se estendia aos mais distantes confins do mundo conhecido.

O primeiro banco privado foi fundado pelo duque Vitali em 1157, em Veneza. Após este, nos séculos XIII, XIV e XV toda uma rede bancária foi criada. A Igreja não teve alternativa senão aceitar a realidade dos fatos. Assim, os bancos foram um dos grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos X até XV. Pois sem essa motivação para o aprimoramento dos cálculos, talvez, essa área de Matemática não estivesse tão avançada nos dias atuais.

As primeiras aritméticas

Como conseqüência do interesse pela educação e do crescimento enorme da atividade comercial no Renascimento, começaram a aparecer muitos textos populares de aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII. Essas obras eram de dois tipos, basicamente aquelas escritas em latim por intelectuais de formação clássica, muitas vezes ligados a escolas da igreja, e outras escritas no vernáculo por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais.

A mais antiga aritmética impressa é a anônima e hoje extremamente rara Aritmética de Treviso, publicada em 1478 na cidade de Treviso. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os "algoritmos" iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental.

Bem mais influente na Itália que a aritmética de Treviso foi a aritmética comercial escrita por Piero Borghi. Esse trabalho altamente útil foi publicado em Veneza em 1484 e alcançou pelo menos dezessete edições, a última de 1557. Em 1491 foi publicada em Florença uma aritmética menos importante, de autoria de Filippo Calandri, porém interessante para nós pelo fato de conter o primeiro exemplo impresso do moderno processo de divisão e também os primeiros problemas ilustrados a aparecerem na Itália.

Texto por Jean Piton Gonçalves

Bibliografia

Robert, Jozsef – *A Origem do Dinheiro*, Global Editora – 1982

Ifrah, Georges – *História Universal dos Algarismos*, Ed. Nova Fronteira

Mattos, Antônio Carlos M.– *O Modelo Matemático dos Juros. Uma Abordagem Sistêmica*, Ed Vozes – Petrópolis

Smith, D.E. – *History of Mathematics* – Dover Publications, INC – New York

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

A Matemática Financeira visa estudar o valor do dinheiro no tempo, nas aplicações e nos pagamentos de empréstimos. Tal definição é bem geral – a Matemática Financeira fornece instrumentos para o estudo e avaliação das formas de aplicação de dinheiro bem como dos pagamentos de empréstimos.

O capital e o juro

Chamamos de **capital** a qualquer valor monetário que uma pessoa (física ou jurídica) empresta para outra durante certo tempo. Tendo em vista que o emprestador se abstém de usar o valor emprestado, e ainda, em função da perda de poder aquisitivo do dinheiro pela inflação e do risco de não pagamento, surge o conceito de **juro**, que pode ser definido como o custo do empréstimo (para o tomador) ou a remuneração pelo uso do capital (para o emprestador).

Chamamos *taxa de juros* ao valor do juro numa certa unidade de tempo expresso como uma percentagem (ou porcentagem) do capital. Assim, por exemplo,

> Se um capital de $ 5000,00 for emprestado por um mês à taxa de 2% a.m. (2% ao mês) o juro será igual a 2% de $ 5000,00, que é igual a $ 100,00. Lembre-se que para achar 2% de 5000, basta multiplicar 5000 por 0,02, que é a forma decimal (ou unitária) de 2% $\left(2\% = \frac{2}{100} = 0,02\right)$.

JUROS SIMPLES

Chamamos de **juros** a remuneração recebida (ou devolvida) pela aplicação de um **capital *C*** a uma **taxa de juros *i*** durante um **período de tempo *n***. Se essa remuneração incide apenas sobre o capital C, teremos o caso de juros simples. Portanto:

$$\mathbf{J = C \cdot i \cdot n}$$

Onde:

- **J** : juros simples;
- **C** : capital inicial (ou valor presente);
- **i** : taxa de juros (na forma unitária);
- **n** : número de períodos de tempo.

<u>Observação</u>: Taxa e período devem estar de acordo em relação à medida do tempo.

Ao valor resgatado no final da aplicação do capital C, damos o nome de **montante**. Portanto,

$$\mathbf{M = C + J} \text{ ou então } \mathbf{M = C(1 + i \cdot n)}$$

Exemplos:

a) Determine o valor dos juros de um empréstimo de $ 900,00 pelo prazo de 5 anos, sabendo que a taxa cobrada é de 3% a.m. (ao mês) de juros simples.

b) Um capital de $ 25.000,00 aplicado durante 7 meses, rende juros de $ 7.875,00. Determine a taxa de juros simples correspondente.

c) Uma aplicação de $ 5.000,00 pelo prazo de 180 dias obteve um rendimento de $ 1.250,00. De quanto é a taxa anual de juros simples correspondente?

Exercícios [Juro simples e montante]:

1 – Se $ 3000,00 foram aplicados por cinco meses à taxa de juros simples de 4% ao mês, determine:

a) os juros recebidos; b) o montante.

2 – Obtenha o montante em cada situação, supondo a taxa de juros simples:

a) $C = 2000$, $n = 7$ meses, $i = 24\%$ a.a. b) $C = 5000$, $n = 20$ dias, $i = 9\%$ a.m.

3 – Um capital de $ 5000,00 aplicado durante um ano e meio a juros simples, rendeu $ 180,00. Qual a taxa mensal de juros?

4 – Uma aplicação de $ 3000,00 a juros simples de taxa mensal igual a 6%, gerou montante igual a $ 3420,00. Determine o prazo de aplicação.

5 – Um artigo de preço à vista de $ 700,00 pode ser adquirido com entrada de 20% mais um pagamento para 45 dias. Se o vendedor cobra juros simples de 8% a.m., qual o valor do pagamento devido ?

6 – Uma empresa tomou $ 3000,00 emprestado para pagar dentro de 5 meses. A uma taxa de juros simples igual a 6% a.m.. Calcule o valor futuro dessa operação.

7 – Qual a taxa de juros simples que, aplicada durante 16 meses, produz um total de juros igual a 38% do valor principal ?

8 – Um capital acrescido dos juros simples pelo prazo de três meses e meio resulta num montante de $ 448.000,00. O mesmo capital, acrescido dos juros simples pelo prazo de 8 meses, resulta num montante de $ 574.000,00. Calcule o valor do capital aplicado e a taxa anual de juros.

Respostas

1) a) J=600 b) M=3600 2) a) M=2280 b) M=5300 3) 0,2% a.m 4) 70 dias
5) $ 627,20 6) $ 3.900,00 7) 2,38% a.m. 8) $ 350.000,00 e 96% a.a.

Operações com um conjunto de títulos

Considere um conjunto de capitais $C_1, C_2, ..., C_k$ aplicados, respectivamente nos prazos $n_1, n_2, ..., n_k$ a uma taxa de juros simples i (constante para todos os capitais). Então o juro total é dado por

$$J_T = i \cdot \left(C_1 \cdot n_1 + C_2 \cdot n_2 + \cdots + C_k \cdot n_k \right) \qquad \text{ou} \qquad J_T = i \cdot \sum_{j=1}^{k} C_j \cdot n_j$$

Exercícios [conjunto de títulos]:

1 – Calcular os juros totais recebidos pelos capitais abaixo nas seguintes condições:

$C_1 = 200$ $\quad i_1 = 4\%\ a.m.$ $\quad t_1 = 4\ meses$

$C_2 = 100$ $\quad i_2 = 10\%\ a.m.$ $\quad t_2 = 6\ meses$

$C_3 = 400$ $\quad i_3 = 3\%\ a.m$ $\quad t_3 = 9\ meses$

2 – Determine os juros que um cliente pagará em 30/08, pelo uso de seu cheque especial, sabendo que a taxa de juros cobrada pelo banco é de 15% a.m. (juros simples). Parte do extrato encontra-se a seguir:

DATA	DESCRIÇÃO	VALOR	SALDO
01/08	Transferência de julho		500,00 (+)
04/08	Depósito	2800,00 (+)	
05/08	Cheque	1600,00 (-)	
10/08	Cheque	1900,00 (-)	
15/08	Depósito	300,00 (+)	
20/08	Cheque	400,00 (-)	
22/08	Saque	600,00 (-)	
25/08	Cheque	800,00 (-)	

Respostas: 1) $ 200,00 2) $ 64,00

DESCONTOS SIMPLES

Estudaremos duas formas de efetuar uma operação de desconto de um título (nota promissória, duplicata mercantil, letra de câmbio ou cheque pré-datado):

Desconto comercial (ou “por fora”)

A taxa de juros incide sobre o valor nominal (N): $\mathbf{D_C = N \cdot i \cdot n}$ e $\mathbf{A = N - D}$

Onde:

D : desconto (neste caso, comercial).
N : valor nominal (ou valor de face), valor do título na data do vencimento.
A : valor atual (ou valor descontado), valor do título na data do desconto.
n : quantidade de períodos antes do vencimento.
i : taxa de desconto.

Exemplos:

a) Um título de valor nominal R$ 10.000,00 foi descontado 45 dias antes do vencimento, a uma taxa de desconto comercial 2% ao mês. Calcular o desconto comercial e o valor descontado.

Resp.: $ 300,00 e $ 9700,00.

b) O desconto comercial de um título foi de $ 750,00, adotando-se uma taxa de juros simples de 30% ao ano. Quanto tempo faltará para o vencimento do título, se seu valor nominal fosse de $ 20000,00 ?

Resp.: 45 dias (1 mês e meio)

<u>Observação:</u> É importante registrar que em operações de desconto com bancos comerciais são geralmente cobradas taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir certas despesas administrativas e operacionais incorridas pela instituição financeira. *Estas taxas são geralmente prefixadas e <u>incidem sobre o valor nominal</u> do título uma única vez no momento do desconto.*

c) Uma empresa vai ao banco para descontar uma duplicata no valor de \$ 7200,00, com vencimento daqui a 7 meses. O banco cobra uma taxa de desconto comercial de 24% ao ano e uma taxa de serviços de 0,05%. Determinar o valor líquido recebido pela empresa.

Resp.: \$ 6188,40.

d) Uma duplicata no valor nominal R\$ 2500,00 com vencimento em 15 de dezembro de 2005 é descontada comercialmente em 01 de setembro do mesmo ano a uma taxa de desconto simples de 6% ao mês. Considerando-se uma taxa de serviços bancários de 2,5% e a cobrança de IOF de 1% ao mês. Calcular o valor líquido recebido.

Resp.: \$ 1825,00

Desconto racional (ou "por dentro")

A taxa de juros incide sobre o valor atual (A):

Sabemos que $\mathbf{N = A(1 + i \cdot n)}$. Portanto, $\mathbf{A = \dfrac{N}{1 + i \cdot n}}$ e $\mathbf{D_R = N - A}$, ou seja, $\mathbf{D_R = \dfrac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}}$

Exemplos:

a) Uma pessoa pretende saldar um título de \$ 5500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros simples corrente é de 40% ao ano. Qual o desconto racional e quanto vai receber ?

Resp.: \$ 500,00 e \$ 500,00.

b) Um título de valor nominal \$ 5300,00, foi descontado à taxa de 18% a.a. Sabendo-se que o desconto racional foi de \$ 300,00, quanto tempo antes do vencimento efetuou-se o resgate ? Resp.: 4 meses.

c) Uma nota promissória de valor nominal \$ 8.856,00, com vencimento em 4 meses, foi comprada por \$ 8.200,00. Qual é a taxa de desconto racional exigida pelo comprador ? Resp.: 24% ao ano.

iii) Relação entre os descontos:

Denominando D_C e D_R os descontos comercial e racional respectivamente. Então

$$\mathbf{D_C = D_R (1 + i \cdot n)},$$

logo, por comparação $\mathbf{D_C > D_R}$. Temos também que

$$\mathbf{N = \frac{D_C \cdot D_R}{D_C - D_R}}.$$

Exemplos:

a) O desconto comercial de um título descontado 3 meses antes de seu vencimento e à taxa de 40% ao ano é de $ 550,00. Qual é o desconto racional ? Resp.: $D_R = 500$.

b) Numa operação de desconto de um título a vencer em 5 meses, o desconto comercial é de $ 140,00 maior que o desconto racional. Qual será o valor nominal do título, se a taxa de juros empregada nos descontos foi de 24% ao ano ? Resp.: $ 15400,00.

c) Qual o prazo de uma antecipação do resgate tal que o desconto racional seja igual a três quartos do desconto comercial, considerando-se uma taxa de juros de 40% ao ano em ambos os descontos ?
Resp.: n=0,814 anos= 10 meses.

Exercícios [Desconto simples]:

1 – Qual o desconto comercial simples de uma promissória de valor nominal $ 25000,00, descontada à taxa de 3% a.m., cinco meses antes do vencimento ?

2 – Qual o prazo de antecipação de um título de valor nominal $ 1200,00 que descontado comercialmente a 9% a.m. gera valor atual igual a $ 1056,00 ?

3 – Descontando por fora uma promissória de valor nominal $ 7350,00 à taxa simples de 3,6% a.m. mais IOF de 1,6% sobre o nominal, dois meses e dez dias antes do vencimento, qual o valor líquido recebido /

4 – Um título descontado comercialmente à taxa simples de 12% a.m. reduz-se, três meses antes do vencimento, a $ 2432,00. Qual o valor nominal desse título ?

5 – Um título, ao ser descontado racionalmente dois meses antes do vencimento, à taxa simples de 5% a.m., teve valor atual igual a $ 8000,00. Qual o valor de face desse título (valor nominal) ?

6 – De quanto é o desconto racional simples sofrido por um título de $ 6715,60 descontado a 24% a.a. em 1 mês e 15 dias ?

7 – Um título tem desconto comercial simples de $ 212, 40 a três meses do vencimento. Se a taxa de operação é de 6% a.m., obtenha o valor correspondente no caso de um desconto racional simples.

8 – Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 8% a.m. e o desconto comercial simples. O valor do desconto foi de $ 1344,00. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em $ 144,00. Nessas condições, determine o valor nominal da duplicata.

9 – A diferença entre os descontos simples “por fora” e “por dentro” de uma letra de câmbio, calculados 180 dias antes do vencimento a 5% a.a., é de $ 45,00. Determine o valor nominal da letra de câmbio.

Respostas

1) $ 3750,00	2) 40 dias	3) $ 6615,00	4) $ 3800,00	5) $ 8800,00
6) $ 195,60	7) $ 180,00	8) $ 11200,00	9) $ 73800,00	

Taxa de juros efetiva

A taxa de juros efetiva é a taxa de juros que, aplicada sobre o valor descontado comercial ou bancário gera no período considerado um montante igual ao valor nominal.

Dados i_f : taxa efetiva e A : valor atual temos a seguinte relação: $\mathbf{N = A(1 + i_f \cdot n)}$ para desconto comercial.

A taxa de juros efetiva pode ser também aquela que conduz, pelo desconto racional, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial. Disso, temos que (como $D_C = D_R$)

$$\mathbf{i_f = \frac{i}{1 - i \cdot n}}.$$

Onde i é a taxa de juros simples (ou de desconto comercial simples) de uma aplicação.

Exemplos:

a) Calcular o desconto comercial de um compromisso no valor nominal de $ 7500,00, considerando-se a taxa de juros simples de 28,8% a.a. e o prazo de antecipação do resgate sendo 50 dias. Que taxa de juros efetiva está sendo cobrada? Resp.: $D_C = 300$ e $i_f = 30\% a.a.$

b) Que taxa anual de desconto comercial exigirá uma entidade financeira uma antecipação de 6 meses. Se ela desejar ganhar a taxa de juros efetiva de 26% a.a. Resp.: 23,01% ao ano.

Exercícios [Taxa de juros efetiva]:

1 – Um título de valor nominal $ 600,00 foi descontado comercialmente 60 dias antes do vencimento à taxa simples de 8% a.m. Calcule a taxa mensal de juros simples efetiva dessa operação.

Resp.: 9,52% a.m.

2 – Uma duplicata de valor igual a $ 12.000,00 foi descontada num banco, 48 dias antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial simples de 2,1% a.m.. Obtenha:

a) o desconto;

b) o valor líquido recebido pela empresa;

c) a taxa efetiva de juros no período;

d) a taxa efetiva mensal de juros simples da operação.

Resp.: a) $403,20 b) $ 11.596,80 c) 3,48% d) 2,17% a.m.

Desconto para um conjunto de títulos e prazo médio

Chama-se prazo médio (ponderado) de um conjunto de títulos ao prazo em que devemos descontar o valor total do conjunto, a uma certa taxa de desconto comercial, para obter o mesmo resultado que a soma dos descontos de cada título, à mesma taxa de desconto.

Sejam $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$ os valores dos títulos com prazos respectivos iguais a $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ e i a taxa de desconto comercial. Chamando de $\bar{n}$ o prazo médio (ponderado), teremos, por definição:

$$(N_1 + N_2 + \cdots + N_k) \cdot i \cdot \bar{n} = N_1 \cdot i \cdot n_1 + N_2 \cdot i \cdot n_2 + \cdots + N_k \cdot i \cdot n_k$$

Portanto:
$$\mathbf{\bar{n} = \frac{N_1 \cdot n_1 + N_2 \cdot n_2 + \cdots + N_k \cdot n_k}{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}}$$

Isto é, o prazo médio é a média ponderada dos prazos dos títulos, sendo os pesos iguais aos valores de cada título.

Exemplos:

a) Uma empresa apresenta o borderô de duplicatas abaixo para serem descontadas num banco à taxa de desconto comercial de 2% a.m..

Duplicata	**Valor**	**Prazo até o vencimento**
A	20.000	30 dias
B	40.000	65 dias
C	80.000	82 dias

i) Qual o valor líquido recebido pela empresa ? ii) Qual o prazo médio ?

Resp.: i) $ 133.493,34 ii) $\bar{n} = 69,71$ dias

b) No seguinte borderô, suponha que cada duplicata seja descontada à taxa de desconto indicada.

Duplicata	**Valor**	**Prazo até o vencimento**	**Taxa de desconto**
A	40.000	20 dias	1,5% a.m.
B	50.000	35 dias	2% a.m.
C	25.000	50 dias	2,5% a.m.

i) Qual seu valor líquido ?

ii) Com qual taxa (constante) de desconto deveríamos descontar o total do borderô, no seu prazo médio, para obtermos o mesmo valor líquido ?

Resp.: i) $ 112.391,67 ii) 2,06% a.m.

Exercícios [Conjunto de títulos e prazo médio]:

1 – Em cada borderô a seguir, suponha que as duplicatas sejam descontadas à taxa de desconto de 1,8% a.m.. Obtenha o valor líquido do borderô e o prazo médio em cada caso:

a)

Duplicata	Valor	Prazo até o vencimento
A	45.000	16 dias
B	60.000	38 dias

Resp.: $ 103.200,00 e $\bar{n} = 28,57$ dias.

b)

Duplicata	Valor	Prazo até o vencimento
P	15.000	20 dias
Q	27.000	32 dias
R	19.000	45 dias

Resp.: $ 59.788,60 e $\bar{n} = 33,10$ dias.

2 – duas duplicatas (uma de $ 25.000,00 e 18 dias até o vencimento, outra de $ 32.000,00 e 38 dias até o vencimento) foram descontadas num banco: a primeira a uma taxa de desconto de 3% a.m. e a segunda a uma taxa de 4% a.m..

a) Qual o valor líquido ? b) Qual o prazo médio do borderô ?

c) Com qual taxa (constante) deveríamos descontar o total do borderô, no seu prazo médio, para obtermos o valor líquido do ítem a) ?

Resp.: a) $ 54.928,67 b) 29,23 dias c) 3,73% a.m.

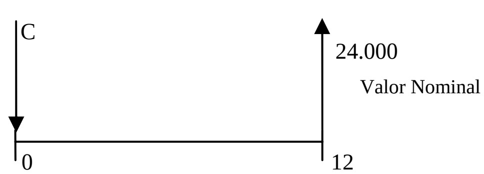
Valor nominal e valor atual

i) Valor nominal – é quanto vale um compromisso na data de seu vencimento. Se após o vencimento o compromisso não for saldado, entendemos que o mesmo continuará tendo seu valor nominal, acrescido de juros e de eventuais multas por atraso.

ii) Valor atual – é o valor que um compromisso tem em uma data que antecede ao seu vencimento.

Para calcular o valor atual, é necessário especificar o valor nominal, a data de cálculo e a taxa de juros a ser utilizada na operação.

Exemplo: Vamos admitir que uma pessoa aplicou hoje uma certa quantia e que recebeu, pela aplicação, um título que irá valer $ 24.000,00 no mês 12. A situação pode ser representada do seguinte modo:

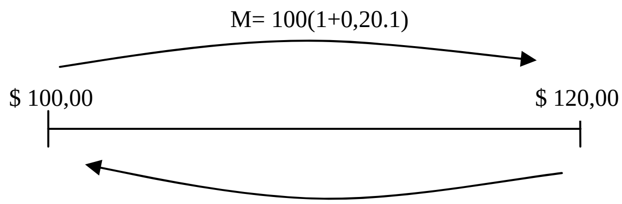


EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS (JUROS SIMPLES)

O problema da equivalência financeira constitui-se no raciocínio básico da matemática financeira. Conceitualmente, dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Exemplos:

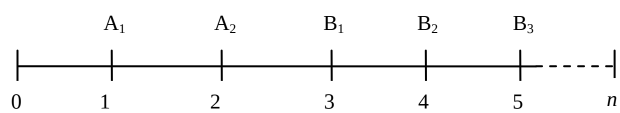
a) $ 120,00 vencíveis daqui a 1 ano e $ 100,00, hoje, são equivalentes a uma taxa de juros simples de 20% ao ano. Ou seja, ambos os capitais produzem, numa data de comparação (data focal) e à taxa de 20% ao ano, resultados idênticos. Graficamente:



$$C = \frac{120}{1 + 0,20 \cdot 1}$$

b) Determinar se $ 438.080,00 vencíveis daqui a 8 meses é equivalente a se receber, hoje, $ 296.000,00, admitindo uma taxa de juros simples de 6% ao mês.

A equivalência de capitais pode então ser generalizada a partir da seguinte representação gráfica:



<u>Os capitais A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 dizem-se equivalentes se, quando expressos em valores de uma data comum (*data de comparação* ou *data focal*), e à mesma taxa de juros, representam resultados iguais.</u>

(i) Sendo a data de comparação o momento 0 (zero), tem-se:

$$\frac{A_1}{(1+i\cdot 1)} + \frac{A_2}{(1+i\cdot 2)} = \frac{B_1}{(1+i\cdot 3)} + \frac{B_2}{(1+i\cdot 4)} + \frac{B_3}{(1+i\cdot 5)}$$

(ii) Se escolhermos o momento 6 como data focal, tem-se:

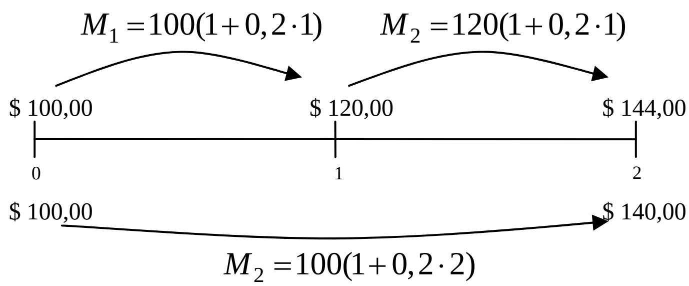
$$A_1(1+i\cdot 5) + A_2(1+i\cdot 4) = B_1(1+i\cdot 3) + B_2(1+i\cdot 2) + B_3(1+i\cdot 1)$$

(iii) Se escolhermos o momento 3 com data focal, tem-se:

$$A_1(1+i\cdot 2) + A_2(1+i\cdot 1) = B_1 + \frac{B_2}{(1+i\cdot 1)} + \frac{B_3}{(1+i\cdot 2)}$$

Na questão de equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser desmembrados (fracionados) sob pena de alterar os resultados<u>. Em outras palavras, dois capitais equivalentes, ao fracionar seus prazos, deixam de produzir o mesmo resultado na data focal pelo critério de juros simples.</u>

Exemplo
Suponha que o montante no final de 2 anos de $ 100,00 aplicados hoje, à taxa de juros simples de 20% ao ano, é igual a $ 140,00. No entanto, este processo de capitalização linear não pode ser fracionado de forma alguma. Por exemplo, apurar inicialmente o montante ao final do primeiro ano e, a partir daí, chegar ao montante do segundo ano envolve a capitalização dos juros (juros sobre juros), prática esta não adotada no regime de juros simples. Graficamente:



<u>**Observações importantes**</u>:

– Como resultado das distorções produzidas pelo fracionamento do prazo, a equivalência de capitais em juros simples é dependente da data de comparação escolhida (data focal). Verifica-se que o saldo a pagar altera-se quando a data focal é modificada. Esta característica é típica dos juros simples (em juros compostos este comportamento não acontece).

– Na prática, a definição da data focal em problemas de substituição de pagamentos no regime de juros simples deve ser decidida naturalmente entre as partes, não se verificando um posicionamento técnico definitivo da Matemática Financeira.

Exemplos [Equivalência de capitais (juros simples)]

a) Um título com valor nominal de $ 7.200,00 vence em 120 dias. Para uma taxa de juros simples de 31,2% ao ano, pede-se calcular o valor deste título:

i) hoje;
ii) dois meses antes de seu vencimento;
iii) um mês após o seu vencimento.

Resp: i) $ 6.521,74 ii) $ 6.844,11 iii) $ 7.387,20

b) Uma pessoa deve dois títulos no valor de $ 25.000,00 e $ 56.000,00 cada. O primeiro título vence de hoje a dois meses, e o segundo um mês após. O devedor deseja propor a substituição destas duas obrigações por único pagamento ao final do quinto mês. Considerando de 3% ao mês a taxa corrente de juros simples, determine o valor deste pagamento único.

Resp: $ 86.610,00.

c) Uma pessoa tem os seguintes compromissos financeiros:

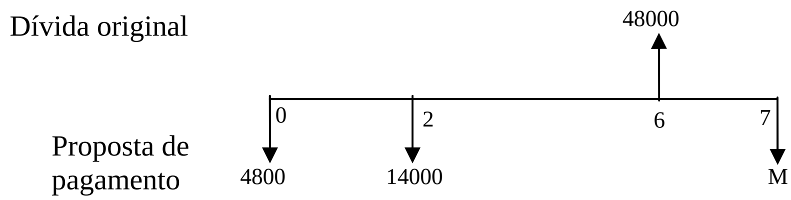
$ 35.000,00 vencíveis no fim de 3 meses; $ 65.000,00 vencíveis no fim de 5 meses

Para o resgate dessas dívidas, o devedor pretende utilizar suas reservas financeiras aplicando-as em uma conta de poupança que rende 66% ao ano de juros simples. Pede-se determinar o valor do capital que deve ser aplicado nesta poupança de forma que possam ser sacados os valores devidos em suas respectivas datas de vencimentos sem deixar saldo final na conta (se possível).

Resp: $ 81.023,31 e sobrará no caixa o valor de $ 925,30.

d) Uma dívida no valor de $ 48.000,00 vence daqui a 6 meses. O devedor pretende resgatar a dívida pagando $ 4.800,00 hoje, $ 14.000,00 de hoje a dois meses e o restante em 1 mês após a data do vencimento. Sendo o momento deste último pagamento definido como a data focal da operação, e sabendo-se ainda que é de 34,8% ao ano a taxa linear de juros adotada nesta operação, determinar o montante do pagamento.

Resp: $ 27.587,60.



Exercícios [equivalência de capitais (juros simples)]:

1 – Um produto pode ser comprado à vista com 10% de desconto ou em duas vezes iguais, “sem juros”, sendo a primeira prestação no ato da compra e a segunda 1 mês depois. Qual a taxa de juros mensais embutida no pagamento em duas vezes (utilize a data focal zero) ? resp.: 25% a.m.

2 – Uma dívida é composta de três pagamentos no valor de $ 2.800,00, $ 4.200,00 e $ 7.000,00, vencíveis em 60, 90 e 150 dias, respectivamente. Sabe-se ainda que a taxa de juros simples de mercado é de 4,5% ao mês. Determinar o valor da dívida se o devedor liquidar os pagamentos:

a) hoje; b) daqui a 7 meses. Resp: a) $ 11.983,53 b) $ 16.016,00

3 – Um eletrodoméstico é vendido em três pagamentos mensais e iguais. O primeiro pagamento é efetuado no ato da compra, e os demais são devidos em 30 e 60 dias. Sendo de 4,4% ao mês a taxa linear de juros, pede-se calcular até que valor interessa adquirir o bem à vista.

Resp: Interessa adquirir o produto à vista por até 95,9% de seu valor, isto é, com desconto de 4,1%.

4 – Um negociante tem as seguintes obrigações de pagamento com um banco:

- $ 18.000,00 vencíveis em 37 dias;
- $ 42.000,00 vencíveis em 83 dias;
- $ 100.000,00 vencíveis em 114 dias.

Com problemas de caixa nestas datas deseja substituir este fluxo de pagamentos pelo seguinte esquema:

$ 20.000,00 em 60 dias; $ 50.000,00 em 90 dias; o restante em 150 dias.

Sendo de 3,2% ao mês a taxa de juros simples adotada pelo banco nestas operações, pede-se calcular o valor do pagamento remanescente adotando como data focal o momento atual.

????Resp.: $ 94.054,23

5 – Uma pessoa tem uma dívida composta dos seguintes pagamentos:

$ 22.000,00 de hoje a 2 meses; $ 57.000,00 de hoje a 5 meses; $ 90.000,00 de hoje a 7 meses.

Deseja trocar estas obrigações equivalentemente por dois pagamentos iguais, vencíveis o primeiro ao final do 6º mês e o segundo no 8º mês. Sendo de 3,7% ao mês a taxa de juros simples, calcular o valor destes pagamentos admitindo-se as seguintes datas de comparação:

a) hoje;
b) no vencimento do primeiro pagamento proposto;
c) no vencimento do segundo pagamento proposto.

Resp: a) $ 88.098,38 b) $ 88.630,28 c) $ 88.496,14

CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior. A taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Neste regime de capitalização, o valor dos juros cresce em função do tempo.

O conceito de montante é o mesmo definido para capitalização simples, ou seja, é a soma do capital aplicado ou devido mais o valor dos juros correspondentes ao prazo da aplicação ou da dívida.

A expressão final do montante *M* para capitalização composta é dada por

$$\boxed{\mathbf{M = C \cdot (1+i)^n}}$$

onde *C* é capital inicial, *i* é taxa de juros composto no período *n*. O termo $(1+i)^n$ é chamado *fator de capitalização* ou *fator de acumulação* de capital para pagamento simples ou único.

Como juros é a diferença entre o montante e o capital inicial, temos o seguinte:

$$\boxed{J = M - C} \quad \text{ou} \quad \boxed{J = C\left[(1+i)^n - 1\right]} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{J = M\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

Exemplos – juros compostos

1 (resolvido) – Calcular o montante, no final de 6 meses, resultante da aplicação de um capital de $ 3000,00 à taxa de 3,75% ao mês na capitalização composta.

Solução: $M = 3000(1+0,0375)^6 = 3000(1,0375)^6 = 3000(1,158650415) \cong 3475,95$.

2 – Qual é o juro auferido de um capital de $ 1500,00, aplicado segundo as hipóteses abaixo:

Taxa	Prazo
a) 10% ao ano	10 anos
b) 8% ao trimestre	18 meses
c) 1% à semana	2 meses

Resp.: a) $ 2.390,61 b) $ 880,31 c) $ 124,29

Observação: *No regime de capitalização composta evite alterar a taxa de juros ao equiparar os períodos, pois os cálculos não ocorrem como no sistema de capitalização simples.*

Exercícios [Juro composto e montante]:

1 – Qual o montante obtido de uma aplicação de \$ 550,00 feita por quatro meses a uma taxa de 20% a.a., no regime de capitalização composta ? resp.: \$ 584,46

2 – Uma operação no regime de capitalização composta rendeu um montante igual a \$ 8.400,00 após 6 meses. Sabendo que a taxa de juros compostos foi de 2% a.m. , calcule o valor presente. Resp.: 7.458,96

3 – Um capital inicial de \$ 430,00 rendeu \$ 80,00 de juros compostos após permanecer aplicado por quatro meses. De quanto foi a taxa de juros mensal da aplicação ? resp.: 4,36% a.m.

4 – Um montante de \$ 630,00 foi obtido após a aplicação de \$ 570,00 a uma taxa de juros compostos igual a 3% a.m.. Qual foi a duração da aplicação ? resp.: $\cong 3,4$ meses

5 – Uma máquina de calcular é anunciada por \$ 140,00 à vista ou para pagamento com prazo igual a dois meses, mediante uma taxa igual a 5% a.m. no regime de capitalização composto. De quanto é o valor futuro ? resp.: \$ 154,35

6 – Calcule o valor futuro de um capital de \$ 52.000,00, aplicado à taxa de juros compostos de 3,8% a.m. pelo prazo de 3 anos. resp.: \$ 1.991.168,70

EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXAS DE JUROS COMPOSTOS

Certos problemas apresentam o período unitário do prazo não compatível com o período unitário da taxa. Quando isto ocorre, é necessário fazer a conversão da taxa ou do prazo.

Duas taxas de juros referidas a períodos diferentes no regime de capitalização composta são *equivalentes* quando resultam no mesmo montante após incidirem sobre o mesmo capital. Temos o seguinte:

$$\boxed{(1+i_q)^t = (1+i_t)^q} \quad , \qquad \text{ou seja} \qquad \boxed{\mathbf{i_q = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1}}$$

Onde (para efeito de memorização):

i_q : taxa para o prazo que eu quero ; ***q*** : prazo que eu quero

i_t : taxa para o prazo que eu tenho ; ***t*** : prazo que eu tenho

Observação: É necessário que (na expressão de equivalência) ***q*** e ***t*** estejam na mesma unidade de tempo.

Exemplos sobre equivalência de taxas em juros compostos:

1 (resolvido) – Determinar a taxa anual equivalente a 2% ao mês:

Solução:

$$i_{anual} = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1 \Rightarrow i_{anual} = (1,02)^{\frac{1ano}{1mês}} - 1 = (1,02)^{\frac{12meses}{1mês}} - 1 = (1,02)^{12} - 1 \cong 0,2682 \text{ ou } 26,82\% \text{ ao ano}$$

Portanto, cobrar (ou pagar) uma taxa de juros *compostos* de 2% ao mês é o mesmo que cobrar (ou pagar) 26,82% ao ano de juros compostos. Observe a diferença no caso de juros simples.

2 – Determinar a taxa mensal equivalente a 60,103% ao ano. Resp.: 4% ao mês.

3 – Determinar a taxa anual equivalente a 0,19442% ao dia. Resp.: 101,22% ao ano.

4 (resolvido) – Determinar a taxa para 183 dias (taxa acumulada em 183 dias), equivalente a 65% ao ano.

Solução:

$$i_{183dias} = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1, \text{ logo}$$

$$i_{183dias} = (1+0,65)^{\frac{183dias}{1ano}} - 1 = (1,65)^{\frac{183dias}{360dias}} - 1 = (1,65)^{0,508333333} - 1 \cong 1,289894937 - 1 \cong 0,2899 \text{ ou}$$

$$i_{183dias} = 28,99\%$$

5 – Uma pessoa aplica $ 15.000,00 num título de renda fixa com vencimento no final de 61 dias, a uma taxa de 72% ao ano. Calcular o seu valor de resgate. Resp.: $ 16.443,73.

6 – Qual a taxa mensal de juros cobrada num empréstimo de $ 64.000,00 para ser quitado por $ 79.600,00 no prazo de 117 dias? Resp.: $5,752\%$ ao mês.

Exercícios [Equivalência de taxas de juros compostos]:

1 – Determine as taxas semestral e anual equivalentes à taxa de juros compostos de 3,2% ao mês.
Resp.: 20,80% a.s. e 45,93% a.a.

2 – Estime a taxa equivalente mensal à taxa semestral igual a 58% no regime de juros compostos.
Resp.: 7,9219% a.m.

3 – Determinar a taxa para 491 dias, equivalente a 5% ao mês. Resp.: 122,23% para 491 dias.

4 – Determinar a taxa para 27 dias, equivalente a 13% ao trimestre. Resp.: 3,73% em 27 dias.

5 – Qual o montante produzido pela aplicação de $ 580.000,00, à taxa de 175% ao ano, pelo prazo de 213 dias ? Resp.: $ 1.055.277,08.

6 – Um investidor aplicou $ 25.000,00 em uma instituição que paga 3% ao mês. Após um período de tempo, ele recebeu $ 35.644,02, estando neste valor incluídos os juros creditados e o capital investido. Quanto tempo ficou o dinheiro aplicado ? Resp.: 12 meses.

7 – Certa aplicação rende 0,225% ao dia (juros compostos). Em que prazo um investidor poderá receber o dobro da sua aplicação ? Resp.: 308 dias.

DESCONTO NO REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

I) DESCONTO COMERCIAL

$\boxed{\mathbf{A = N(1 - i)^n}}$ e $\boxed{D_C = N - A}$ então $\boxed{\mathbf{D_C = N \cdot \left[1 - (1 - i)^n\right]}}$

Exemplos sobre desconto comercial composto:

1 – Uma duplicata no valor de $ 28.800,00, com 120 dias para seu vencimento é descontada comercialmente a uma taxa de 2,5% ao mês. Calcular o valor líquido creditado na conta e o valor do desconto concedido.

Solução:

$D_C = 28800[1-(1-0,025)^4] = 28800[1-(0,975)^4] = 28800[1-0,90368789] = 2773,79$, logo

$A = N - D_C = 28800 - 2773,79 = 26026,21$ é o valor líquido creditado na conta.

2 – Uma empresa descontou um título no valor de $ 67.300,00, com 51 dias de prazo, recebendo um crédito em conta no valor de $ 61.680,12. Calcular a taxa mensal de desconto comercial composto cobrada. Resp.: $\cong 5,2\%$ a.m.

II) DESCONTO RACIONAL

Temos que: $\boxed{D_R = N - A}$ e $\boxed{\mathbf{A = \dfrac{N}{(1+i)^n}}}$

Portanto: $\boxed{\mathbf{D_R = N - \dfrac{N}{(1+i)^n}}}$ ou $\boxed{\mathbf{D_R = A \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]}}$

Exemplos sobre desconto racional composto:

1 – Um título, com 90 dias a vencer, foi descontado racionalmente à taxa de juros composto de 3% ao mês, produzindo um desconto no valor de $ 1.379,77. Calcular o valor nominal do título.

Solução:

$$D_R = N - \frac{N}{(1+i)^n} \iff 1379,77 = N - \frac{N}{(1+0,03)^3} \iff 1379,77 \cong N - 0,915141659N$$

$$1379,77 \cong N - 0,915141659N \iff 1379,77 = 0,08485834N \iff \frac{1379,77}{0,08485834} = N$$

$$N = 16259,69$$

2 – O cliente de um banco verificou que em uma operação de desconto racional composto comprazo de 7 meses, o valor presente é igual a 82% de seu valor de resgate. Determine a taxa mensal de desconto dessa operação. Resp.: $\cong 2,88\%$ a.m.

Exercícios [Descontos compostos (comercial e racional)]:

1 – Calcule o desconto de um título de valor nominal $ 600,00, descontado 5 meses antes do vencimento a uma taxa de desconto racional composto igual a 4% a.m. Resp.: $ 106,84

2 – Determine o valor do desconto racional composto de um título de $ 40.000,00 com vencimento no prazo de 85 dias, a uma taxa de juros compostos de 1% a.m. Resp.: $ 1.111,96

3 – Uma empresa possui uma nota promissória com vencimento para 90 dias e valor nominal igual a $ 34.000,00. Se a empresa descontasse por dentro esse titulo a uma taxa de juros compostos igual a 5% a.m., qual seria o valor líquido recebido ? Resp.: $ 29.370,48

4 – Uma nota promissória no valor de $ 60.000,00 foi resgatada 68 dias antes do vencimento com uma taxa de desconto por dentro de 15% ao ano. Determine o valor do principal dessa operação no regime de juros compostos. Resp.: $ 58.436,76

5 – Uma duplicata no valor de $ 8.000,00 foi descontada 4 meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto comercial composto igual a 3% a.m. Calcule o valor líquido da operação e o desconto sofrido pelo título. Resp.: $ 7.082,34 e $ 917,66.

6 – Um título com vencimento no prazo de 1 ano tem valor nominal de $ 27.000,00. Sabendo-se que esse título foi descontado 5 meses antes do seu vencimento, num banco que cobra 0,3% de taxa administrativa e que a taxa corrente de desconto racional composto é de 2 % ao mês. Quanto recebeu o proprietário do título ? Resp.: $ 24.373,73.

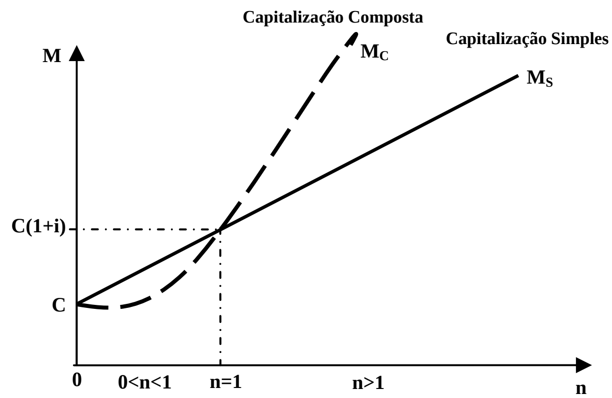
COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS PROCESSOS DE CAPITALIZAÇÃO

As expressões: $\boxed{M = C(1+i\cdot n)}$ e $\boxed{M = C(1+i)^n}$ nos dão o montante *M* de um capital inicial *C* a juros simples e juros compostos, respectivamente, suponha que *C* e *i* são constantes. Desse modo, passa-se a ter *M* como função de *n* nas duas expressões.

$\boxed{M_S = C(1+i\cdot n)}$, função montante simples. Observe que esta é uma função do 1° grau.

$\boxed{M_C = C(1+i)^n}$, função montante composto. Esta é uma função exponencial.

Podemos esboçar o gráfico das duas funções num mesmo plano cartesiano e comparar os valores de M_S e M_C nas situações seguintes: $n=0$, $0 < n < 1$, $n = 1$ e $n > 1$.



Do gráfico acima concluímos que:

i) nos períodos $n=0$ e $n=1$, o montante M é o mesmo nos dois regimes.

ii) quando o período varia entre 0 e 1 ($0 < n < 1$), M é maior nos juros simples do que nos juros compostos.

iii) quando o período for maior do 1 ($n > 1$), M nos juros simples é menor do que nos juros compostos.

Com base nessas observações temos que, quando o prazo de uma aplicação é um número fracionário, podemos considerar duas convenções para resolver o problema:

Convenção Linear : Observando que o valor de n deve estar na mesma unidade de referência da taxa de juros, a convenção linear adota juros compostos nos períodos correspondentes à parte inteira do valor de ***n*** e juros simples nos períodos correspondentes à parte fracionária do valor de ***n*** sobre o montante calculado a juros compostos.

$$\boxed{\mathbf{M = C(1+i)^m \cdot \left(1 + i \cdot \frac{p}{q}\right)}}$$

Onde :

$$m + \frac{p}{q} = n \text{ , com } p \text{ e } q \text{ primos entre si e } p < q .$$

Exemplo (resolvido) sobre convenção linear:

Um capital no valor de $ 5.000,00 foi aplicado por 3 meses e 15 dias à taxa de juros compostos de 4% ao mês. Calcular o valor de resgate dessa aplicação utilizando a convenção linear.

Solução: Podemos escrever o prazo do seguinte modo: $n = 3meses + 15dias = \underbrace{3meses}_{m} + \underbrace{\frac{1}{2}mês}_{\frac{p}{q}}$.

Utilizando a convenção linear, temos: $M = 5000(1+0,04)^3 \cdot \left(1+0,04 \cdot \frac{1}{2}\right)$

Ou seja, $M = 5000(1,04)^3 \cdot (1+0,02) = 5000(1,124864)(1,02) = 5736,81$.

Observe que este valor do <u>montante é maior</u> que o mesmo calculado usando juros simples ou a fórmula dos juros compostos.

Convenção Exponencial : A convenção exponencial adota juros compostos sobre todo o período (parte inteira e fracionária).

$$\boxed{\mathbf{M = C(1+i)^n}}$$

Exemplo envolvendo convenção exponencial:

Uma pessoa aplicou $ 10.000,00 a juros compostos de 15% ao ano, pelo prazo de 3 anos e 8 meses. Determine o montante da aplicação ao final do prazo, admitindo-se:

a) a convenção linear; b) a convenção exponencial.

Resp.: a) $ 16.729,62 b) $ 16.693,94.

Exercícios – convenção linear e exponencial

1 – Um capital no valor de $ 5.000,00 foi aplicado por 3 meses e 15 dias a uma taxa de 4% a.m. no regime de capitalização composta. Determine o valor de resgate desta aplicação

a) adotando a convenção linear;

b) adotando a convenção exponencial. Resp.: a) $ 5.736,81 b) $ 5.735,70

2 – O valor de $ 68.000,00 foi resgatado após ter sido aplicado por 2 meses e 3 dias a uma taxa de 8% a.m. no regime de capitalização composta com convenção linear. Determine o capital aplicado.

Resp.: $ 57.836,35

3 – Uma pessoa tomou um empréstimo de $ 2600,00 em 18 de fevereiro de 2002, a uma taxa de juros compostos mensal de 5%. Sabendo que liquidou sua dívida em 10 de maio do mesmo ano, qual valor pago usando a convenção linear ? resp.: $ 2.966,83

4 – Prove que um capital *C* aplicado no regime de capitalização composta com convenção linear produz um montante maior do que o obtido utilizando-se a convenção exponencial.

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS (JUROS COMPOSTOS)

Como já foi visto no caso das operações de desconto, é freqüente a necessidade de antecipar ou de prorrogar títulos nas operações financeiras. Às vezes queremos substituir um título por outro ou por vários. Podemos também ter vários títulos que queremos substituir por um único ou por vários. Tais questões dizem respeito, de modo geral, à comparação de valores diferentes referidos a datas diferentes, considerando-se uma dada taxa de juros.

Data focal – é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes. A data focal também é chamada *data de avaliação* ou *data de referência*.

Equação de valor – a equação de valor permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, para uma mesma data focal, desde que seja fixada uma certa taxa de juros. Em outras palavras, a equação de valor pode ser obtida igualando-se em uma data focal as somas dos valores atuais e/ou montantes dos compromissos que formam a alternativa em análise.

Observação: *Uma das grandes vantagens do regime de juros compostos é que nos permite garantir que uma comparação feita em uma dada data focal permanece válida em qualquer outra data focal.*

Capitais Equivalentes (juros compostos)

Seja um conjunto de valores nominais e suas respectivas datas de vencimento:

Capital	Data de Vencimento
C_1	1
C_2	2
C_3	3
$\vdots$	$\vdots$
C_n	n

Adotando-se uma taxa de juros compostos *i*, estes capitais serão equivalentes na data focal 0, se:

$$\boxed{V = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \cdots = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

Indicamos os valores por *V*, já que estes são valores atuais à taxa de juros *i*, na data focal 0.

Exemplo: Consideremos os valores nominais na tabela ao lado e admitindo uma taxa de juros compostos de 10% a.a.

Capital ($)	Data de Vencimento (anos)
1.100,00	1
1.210,00	2
1.331,00	3
1.464,10	4
1.610,51	5

a) Verificar se os capitais são equivalentes na data focal zero.

b) Verificar se os capitais são equivalentes na data focal 3.

Resposta: são equivalentes em a) e em b).

Valor atual de um conjunto de capitais

Suponhamos que uma pessoa tenha carteira de aplicações e títulos de renda fixa com datas de vencimento diferentes. Esta carteira de valores nominais é um conjunto de capitais. O conjunto pode ser caracterizado pelo valor nominal do título e por sua data de vencimento:

Capital	**Data de Vencimento**
C_1	1
C_2	2
C_3	3
$\vdots$	$\vdots$
C_n	n

Uma questão normal é a de saber qual o valor da carteira, ou seja, do conjunto de capitais numa determinada data. Para isto, é necessário fixar-se a taxa de juros *i* e a data focal, que vamos admitir, neste caso, como sendo a data zero.

Nestas condições, o valor da carteira pode ser obtido descontando-se os títulos para a data zero e somando-se os valores obtidos:

$$\boxed{V = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

O total obtido *V* é o *valor atual* do conjunto de capitais na data zero. É o valor atual desta carteira, que é quanto ela vale. Ou seja, dado um custo de oportunidade de capital (a taxa de juros vigente no mercado) e uma data de comparação, podemos dizer que o valor atual naquela data "mede" o valor da carteira.

Exemplo: Admitamos o conjunto de capitais na tabela ao lado e uma taxa de juros compostos de 3% a.m.

Capital ($)	**Data de Vencimento (Mês)**
1.000,00	6
2.000,00	12
5.000,00	15

a) pergunta-se qual o valor atual deste conjunto na data focal zero:

$$V = \frac{1000}{(1+0,03)^6} + \frac{2000}{(1+0,03)^{12}} + \frac{5000}{(1+0,03)^{15}}$$

b) Qual o valor na data focal 10 ?

$$V_{10} = 1000(1+0,03)^4 + \frac{2000}{(1+0,03)^2} + \frac{5000}{(1+0,03)^5}$$

c) Capitalize *V* em 10 meses na taxa referida e compare com o item b).

<u>**Observação:**</u> Quando se usa taxa de juros compostos, uma vez obtido o valor atual de um conjunto de capitais (carteira) numa data focal, para passar para outra data basta fazer a capitalização ou desconto à taxa de juros usada.

Conjuntos equivalentes de capitais

Sejam dados a taxa de juros *i* e dois conjuntos de valores nominais com seus respectivos prazos, contados a partir da mesma data de origem:

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital	**Data de vencimento**	**Capital**	**Data de vencimento**
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	m_n	C'_n	m'_n

Diz-se que dois conjuntos são equivalentes quando, fixada uma data focal e uma taxa de juros, os valores atuais dos dois conjuntos forem iguais.

Deste modo, à taxa *i* e na data zero, os conjuntos dados serão equivalentes se:

$$\boxed{\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}}+\frac{C_2}{(1+i)^{m_2}}+\cdots+\frac{C_n}{(1+i)^{m_n}}=\frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}}+\frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}}+\cdots+\frac{C'_n}{(1+i)^{m'_n}}}$$

Exemplo: Verificar se os conjuntos de valores nominais, referidos à data zero, são equivalentes à taxa de juros de 10% a.a.

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital ($)	**Data de vencimento**	**Capital ($)**	**Data de vencimento**
1.100,00	1º ano	2.200,00	1º ano
2.420,00	2º ano	1.210,00	2º ano
1.996,50	3º ano	665,50	3º ano
732,00	4º ano	2.196,15	4º ano

Exemplos de problemas que envolvem equivalência de capitais (juros compostos)

1 – Um título no valor nominal de $ 8.500,00, com vencimento para 5 meses, é trocado por outro de $ 7.934,84, com vencimento para 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros corrente de mercado é de 3,5% a.m., pergunta-se se a substituição foi vantajosa.

Resposta: não há vantagem alguma na substituição dos títulos, pois são equivalentes na data focal zero. (indiferente).

2 – João irá receber $ 6.000,00 dentro de 1 ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma Nota Promissória no valor de $ 6.000,00, com vencimento para 6 meses.

João fez bom negócio, se a taxa de mercado for de 20% a.a. ?   Resp: João não fez bom negócio.

3 – Considerando-se que a taxa de juros é de 4% a.m., será que $ 8.000,00 hoje equivale a $ 10.000,00 em 6 meses ? Resp: $ 8.000,00 hoje é melhor que $ 10.000,00 daqui a 6 meses.

4 – A que taxa de juros anuais $ 2.000,00 a 1 ano equivalente a $ 2.300,00 a 2 anos ? resp: i=15% a.a.

5 – Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de $ 15.000,00, e o segundo em 1 ano e meio, no valor de $ 25.000,00. O cliente aceita, assinando uma Nota Promissória com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros considerada na operação foi de 30% a.a., qual é o valor de Nota Promissória em seu vencimento ? resp: $ 32.386,64.

6 – Uma dona de casa, prevendo suas despesas com as festas de fim de ano, resolve depositar $ 4.000,00 em 30/03/20X6 e $ 5.000,00 em 30/07/20X6, em um banco que paga 8% ao quadrimestre.

Quanto possuirá a depositante em 30/11/20X6 ? resp: 10.065,60.

Os exercícios seguintes estão resolvidos nas páginas 165–176 do livro: W. F. Mathias, J. M. Gomes. *Matemática Financeira*, 3ª ed. Atlas 2002. Tente resolvê-los sozinho(a), não conseguindo, veja a solução no livro.

7 – Um terreno é posto a venda por $ 100.000,00 a vista ou, caso o comprador opte por financiamento, por $ 50.000,00 no ato mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de $ 34.000,00 e a segunda de $ 35.000,00. Qual é a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos que a taxa de juros corrente é de 50% a.a. ? resp: a vista é melhor.

8 – Certa pessoa contraiu uma dívida, comprometendo-se a saldá-la em dois pagamentos: o primeiro de $ 2.500,00 e o segundo, 6 meses após o primeiro, de $ 3.500,00. Contudo, no vencimento da primeira parcela, não dispondo de recursos, o devedor propôs adiamento de sua dívida. O esquema apresentado foi: pagamento de $ 4.000,00 daí a 3 meses e o saldo em 9 meses. Se a taxa de juros considerada foi de 2,5% a.m., qual é o saldo restante ? resp: $ 2.252,50.

9 – Um carro está a venda por $ 20.000,00 de entrada e $ 20.000,00 após 6 meses. Um comprador propõe pagar $ 25.000,00 como segunda parcela, o que será feito, entretanto, após 8 meses. Neste caso, quanto deverá dar de entrada, se a taxa de juros de mercado for de 2% a.m. ?

10 – Um conjunto de dormitório é vendido em uma loja por $ 5.000,00 à vista ou a prazo em dois pagamentos trimestrais iguais, não se exigindo entrada. Qual é o valor dos pagamentos, se a taxa de juros considerada for de 8% a.t. ? resp: $ 2.083,85.

11 – Um sítio é posto à venda em uma imobiliária por $ 500.000,00 à vista. Como alternativa, a imobiliária propõe: entrada de $ 100.000,00, uma parcela de $ 200.000,00 para 1 ano e dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro em 6 meses e o segundo em 1 ano e meio. Qual é o valor destes pagamentos, se a taxa de juros adotada for de 5% a.m. ? resp: $ 248.449,30.

12 – Na venda de um barco, a Loja Náutica S. A. oferece duas opções a seus clientes:
1ª) $ 30.000,00 de entrada mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de $ 50.000,00 e a segunda de $ 100.000,00.
2ª) sem entrada, sendo o pagamento efetuado em quatro parcelas trimestrais: $ 40.000,00 nas duas primeiras, e $ 50.000,00 nas duas últimas.
Qual a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos a taxa de juros de mercado de 4% a.m. ?
resp: 1ª Alternativa, pois tem menor valor atual.

13 – Uma “butique” vende um vestido por $ 1.800,00, podendo este valor ser pago em três prestações mensais iguais, sendo a primeira paga na compra. Uma cliente propõe um pagamento de $ 1.000,00 como terceira parcela. De quanto devem ser as duas primeiras se forem iguais e a taxa de juros adotada pela “butique” for de 8% a.m. ?
resp: $ 421,94.

14 – Uma loja tem como norma facilitar os pagamentos, proporcionando aos seus clientes a possibilidade de pagar em três meses sem acréscimo. Neste caso, o preço a vista é dividido por três e a primeira parcela é dada como entrada. Qual é o desconto sobre o preço a vista que a loja pode conceder, se sua taxa for de 7,5% a.m. ?
Resp: 6,8%.

15 – Um imóvel está a venda por 4 parcelas semestrais de $ 50.000,00, vencendo a primeira em 6 meses. Um financista propõe a compra deste imóvel, pagando-o em duas parcelas iguais, uma no ato da compra e outra após 1 ano. Qual o valor das parcelas, se a taxa de juros ajustada for de 20% a.s. ? resp: $ 76.388,89.

JUROS (no Brasil, um pouco de história e leis)

Charge do jornal A Tarde de 1º/05/2005.

Existem várias teorias e interpretações sobre os juros: recompensa ou remuneração futura à renúncia ao consumo presente, aluguel pelo uso do capital de terceiros etc. O economista austríaco Schumpeter considerava juros uma forma de imposto sobre o lucro. John Maynard Keynes defendia que a taxa de juros se determina (como os demais preços) com base nos movimentos de oferta e de demanda de recursos. A oferta é exercida pelos detentores de moeda (capital) como mercadoria para empréstimo, e a demanda é exercida pelas pessoas físicas e jurídicas que necessitam de recursos para consumo, investimentos, capital de giro etc. Proibidos por quase durante toda a Idade Média pelos pensadores católicos, certamente influenciados pela condenação aristotélica sobre acumulação de riqueza e cobrança de juros, os juros foram reconhecidos pela Igreja Católica no final da Idade Média, admitidos como:

- *dammum emergens* (dano emergente), juros de mora;
- *lucrum cessans* (lucro cessante), juros como recompensa pelo custo de oportunidade;
- *periculum sortis* (risco), juros em função do risco assumido pelo emprestador.

Independentemente das correntes históricas, eclesiásticas e conceituais do tema, atualmente no Brasil a taxa de juros é um dos mais importantes instrumentos de política monetária que o governo possui. Com ela o Banco Central interfere no nível de atividade econômica e na formação de preços. Existem vários tipos de juros, representados pelas taxas de caderneta de poupança, aplicações financeiras (CDB, fundos etc.), empréstimos/financiamentos para aquisição de bens e serviços, e algumas outras operações que possuem juros de forma não-direta, ou seja, não declaram a existência formal de juros, mas cobram indiretamente do cliente, tais como *leasing* financeiro, como consórcio, locação etc.

Podemos classificar os juros em três categorias em termos de *periculum sortis*: curto, médio e longo prazos – um dos motivos da grande variedade de taxas – em função do prazo e do risco que cada tomador representa ao credor. Com as muitas taxas de juros existentes no Brasil, o governo controla, através do Banco Central, somente a taxa do mercado de reservas bancárias – taxa Selic, certamente um mercado não muito conhecido pelo brasileiro –, influenciando assim as demais taxas da nossa economia. Todavia, as taxas de juros que mais interferem no dia-a-dia dos brasileiros são aquelas praticadas pelos bancos (aplicações financeiras em geral, cheque especial e empréstimos) e pela indústria, comércio e prestadores de serviços em geral nas vendas a prazo. A interferência do governo nessas taxas se dá de forma indireta, ou seja, existem também componentes de mercado que regulam indiretamente a formação do preço-taxa.

Os bancos comerciais são obrigados a manter no Banco Central um percentual sobre os depósitos à vista – depósito compulsório – que compõe a conta de reservas bancárias (recursos sem e com remuneração), cuja função é permitir aos bancos realizar transações rotineiras com o Banco Central. Toda transação (compensação de cheques, compra e venda de moeda estrangeira etc.) que ocorre no sistema bancário passa pela conta de reservas. O Banco Central atua nesse mercado como único agente de oferta de reservas pelas operações de: mercado aberto (*open market*), mercado privativo das instituições financeiras onde ocorre a troca de reservas bancárias, lastreadas em títulos públicos federais; e redesconto, empréstimos a instituições financeiras.

O Banco Central utiliza o *open market* como um importante instrumento de política monetária, vendendo títulos quando há excesso de recursos na economia ou resgatando-os quando é necessário aumentar a liquidez (mais dinheiro no sistema). No processo de gestão operacional diária dos bancos, alguns podem apresentar excesso de liquidez e outros, posição contrária. Nesse caso, os bancos poderiam trocar reservas (quem tem liquidez em excesso emprestaria para quem precisa de liquidez). Sem a atuação do governo, a taxa de juros entre os bancos poderia subir ou cair dependendo dos movimentos de oferta e procura; porém, essa taxa é fixada pelo Banco Central – monopolista do mercado de reservas. Ao fixar a taxa de juros primário (Selic) em torno de 26% a.a. para compra e venda de reservas em 2003, os seguintes movimentos poderão ocorrer: se o mercado bancário estiver com excesso de reservas, nenhum banco superavitário emprestará reserva a uma taxa inferior a 26% a.a.; em contrapartida, nenhum banco deficitário pagaria mais de 26% a.a. para captar recursos no mercado interbancário.

É com esse mecanismo que a taxa de juros básica é balizada em torno de 26% a.a. – taxa válida somente por um dia – e a partir dessa taxa arbitrada pelo Banco Central as demais taxas de juros são formadas no mercado, daí o nome de taxa básica ou primária. O Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) foi criado em 1972 para simplificar, controlar, movimentar e ofertar publicamente e sistematizar a negociação e custódia de títulos públicos no mercado (reservas bancárias). A sua gestão é de responsabilidade do Banco Central e da Andima (Associação Nacional das Instituições do Mercado Aberto). É basicamente um sistema *real time* onde as instituições credenciadas registram e liquidam os negócios realizados com títulos públicos. Ou seja, eletronicamente (online) é transferida a titularidade ao banco comprador e creditado ao banco vendedor – ambos acompanham a transparência e validação da operação. É possível acompanhar os volumes diários de títulos negociados no Selic através de publicação da Andima e jornais de negócios.

Podemos também considerar que juros podem ser a relação percentual existente entre o capital e a sua remuneração. A política monetária do governo federal é um componente básico no processo de formação dos juros finais para o tomador de crédito. O Decreto nº 3.088, de 21 de junho de 1999, estabelece a sistemática de metas para a inflação como diretriz para a determinação do regime de política monetária. Todavia, outros componentes também são importantes e determinantes da taxa de juros final:

- nível de liquidez da economia;
- expectativa de inflação (quando se tratar de operação prefixada);
- risco do cliente e garantias envolvidas;
- impostos e encargos diretos e indiretos incidentes sobre os vários produtos de crédito;
- custos de captação (*funding*);
- *overhead* das instituições financeiras (despesas de funcionamento);
- lucro das operações.

[Alguns aspectos legais]

Os instrumentos de política monetária e creditícia comumente utilizados pelas autoridades monetárias (Conselho Monetário Nacional e Banco Central do Brasil) estão previstos na Lei nº 4.595, de 31 de dezembro de 1964.

Ali se vê que o Conselho Monetário Nacional pode, entre outras coisas, disciplinar o crédito, em todas as suas modalidades, e limitar, sempre que necessário, as taxas de juros, descontos, comissões e qualquer outra forma de remuneração de operações e serviços bancários. Além disso, também é função do Conselho Monetário Nacional determinar recolhimentos compulsórios e encaixes.

A Constituição Federal de 5 de outubro de 1988 previu a edição de uma (nova) lei complementar que teria a função de substituir a Lei nº 4.595/64. Até agora, porém, o Congresso Nacional ainda não chegou a um consenso sobre o assunto e, por esse motivo, a Lei nº 4.595/64 continua sendo a lei fundamental de todo o sistema bancário.

No Brasil, há vasta regulamentação a respeito de juros. Em primeiro lugar, cabe distinguir entre os juros praticados por instituição financeira (bancos, sociedades de arrendamento mercantil, corretoras, distribuidoras e outras instituições integrante do Sistema Financeiro Nacional) dos juros praticados por particulares em geral (pessoas físicas e pessoas jurídicas que não se qualificam como instituição financeira).

No primeiro caso, prevalece o princípio da liberdade na estipulação dos juros, devendo-se observar, contudo, o seguinte: as instituições financeiras são proibidas de praticar o *anatocismo* (cobrança de juros sobre juros em períodos inferiores a um ano; Decreto nº 22.626, de 7 de abril de 1933 – a Lei de Usura – , art. 4º, combinado com a Súmula nº 121, do Supremo Tribunal Federal; importante observar que a mesma regra foi adotada no Novo Código Civil, ressalvadas, porém, as hipóteses expressamente autorizadas na legislação (Súmula nº 93 do Supremo Tribunal de Justiça. No momento, a Medida Provisória nº 2.170, sucessivamente reeditada, procura ampliar tal regra de exceção para toda e qualquer operação realizada por instituição financeira; a cobrança de juros pelas instituições financeiras deve obedecer às regras contidas na regulamentação baixada pelo Banco Central do Brasil.

No segundo caso, prevalece a regra geral contida na Lei de Usura, ou seja, juros remuneratórios são limitados a uma taxa máxima de 12% a.a., sendo ainda vedado o anatocismo.

Em matéria de juros moratórios, importa notar que, no âmbito das instituições financeiras, a prática que tem prevalecido é no sentido de se cobrar a chamada comissão de permanência (que, em princípio, reflete o custo ocorrido pelo banco para a rolagem do *funding* que deixou de ser pago em seu vencimento) e juros moratórios de 1% ao mês. Contudo, diante da crescente jurisprudência contrária à cobrança da comissão de permanência, é possível que, futuramente, essa prática cesse.

Em relação às operações entre particulares, a regra que passou a vigorar com a vigência do Novo Código Civil (Lei nº 10.406, de 10 de janeiro de 2002) é no sentido de que os juros moratórios podem ser fixados às mesmas taxas aplicáveis para a mora no pagamento de impostos devidos à Fazenda Nacional.

Importa esclarecer, por fim, que, ao lado das regras gerais já citadas, há diversas outras regras tratando de aspectos bastante específicos ao redor do tema juros. Assim, confira-se, por exemplo, a Lei nº 1.521, de 26 de dezembro de 1951, que define como crime contra a economia popular a cobrança de juros a taxas superiores àquelas permitidas por lei; a Lei nº 7.492, de 16 de junho de 1986, que considera crime contra o Sistema Financeiro Nacional (crime do colarinho branco) a exigência de juros em desacordo com a legislação vigente; a Lei nº 8.078, de 11 de setembro de 1990 (Código de Defesa do Consumidor), que exige, entre outras coisas, a divulgação clara e precisa do valor dos juros cobrados nos financiamentos ao consumidor.

Fonte: C. A. Di Augustini, N. S. Zelmanovits. "*Matemática Aplicada à Gestão de Negócios*". Editora FGV, 2005.

Consulte também os sites (dentre os muitos que existem)

< www.bcb.gov.br >

< www.planalto.gov.br >

< www.dinheirovivo.com.br >

< www.fgv.br >

< www.andima.com.br >

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. J. D. V. Sobrinho. *Matemática Financeira*, 7ª edição. Atlas 2000.

2. W. F. Mathias, J. M. Gomes. *Matemática Financeira*, 3ª edição. Atlas 2002.

3. C. H. R. Boaventura. *Matemática Financeira – Uma Abordagem Prática*. CTRH, 2005.

4. A. Assaf Neto. *Matemática Financeira e suas Aplicações*, 8ª edição. Editora Atlas, 2003.

5. S. Hazzan, J. N. Pompeo. *Matemática Financeira*, 5ª Edição. Editora Saraiva, 2003.

6. F. Ayres Jr. *Matemática Financeira*, coleção Schaum. Editora Mcgraw-Hill.

7. A. C. Castelo Branco. *Matemática Financeira aplicada*. Editora Makron Books.

8. M. Juer. *Praticando e aplicando matemática financeira*. Editora Qualitymark.

9. A. L. Puccini. *Matemática financeira objetiva e aplicada*. Editora LTC.

10. C. P. Samanez. *Matemática financeira*. Prentice Hall

11. A. J. Tosi. *Matemática financeira com utilização do Excel*. Editora Atlas.

12. L. J. Gitman. *Princípios de Administração Financeira Essencial*, 2ª Edição. Bookman, 2004.

13. O. Pilagallo. *A aventura do dinheiro – uma crônica da história milenar da moeda*. Publifolha, 2000.

14. C. A. Di Augustini, N. S. Zelmanovits. *Matemática Aplicada à Gestão de Negócios*. FGV, 2005.

Existe uma infinidade de livros versando sobre matemática financeira, você pode escolher outros que não estejam na referência acima.